السنة 1 بكالوريا علوم تجريبية	المتتاليـــــات العددية حلول مقترحة	سلسلة 3

تمرين 1 : $u_0 = -1$; $u_{n+1} = \frac{9}{6-u_n}$ ، $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$

1

لدينا :
$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}-3} - \frac{1}{u_n - 3} = \frac{1}{\frac{9}{6-u_n} - 3} - \frac{1}{u_n-3} = \frac{1}{\frac{9-3(6-u_n)}{6-u_n}} - \frac{1}{u_n-3}$$
$$= \frac{6-u_n}{9-18+3u_n} - \frac{1}{u_n-3} = \frac{6-u_n}{3(-3+u_n)} - \frac{3}{3(u_n-3)} = \frac{6-u_n-3}{3(u_n-3)} = \frac{3-u_n}{3(u_n-3)} = \frac{1}{3}$$

بالتالي (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = \frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0 = \frac{1}{u_0-3} = \frac{1}{-4} = \frac{-1}{4}$

2

$$\boxed{v_n = v_0 + r\,n = \frac{-1}{4} + \frac{1}{3}n = \frac{4n-3}{12}}$$

3

لدينا: $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$ منه : $u_n - 3 = \frac{1}{v_n}$ منه :
$$\boxed{u_n = \frac{1}{v_n} + 3 = \frac{12}{4n-3} + 3 = \frac{12+12n-9}{4n-3} = \frac{12n+3}{4n-3}}$$

4

$$\boxed{S = v_0 + v_2 + \ldots + v_6 = \frac{v_0+v_6}{2}\times 7 = \frac{\frac{-1}{4}+\frac{4\times 6-3}{12}}{2}\times 7 = \frac{\frac{-3+24-3}{12}}{2}\times 7 = \frac{18}{24}\times 7 = \frac{3}{4}\times 7 = \frac{21}{4}}$$

تمرين 2 : $u_0 = 2$; $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 1$ و $v_n = u_n - \frac{5}{3}$

1

لدينا : $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{5}{3} = \frac{2}{5}u_n + 1 - \frac{5}{3} = \frac{2}{5}u_n - \frac{2}{3} = \frac{2}{5}\left(v_n + \frac{5}{3}\right) - \frac{2}{3} = \frac{2}{5}v_n + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{5}v_n$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{5}$ و حدها الأول $v_0 = u_0 - \frac{5}{3} = 2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$

2

$\boxed{v_n = v_0 \times q^n = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n}$ ، ولدينا : $v_n = u_n - \frac{5}{3}$ منه : $\boxed{u_n = v_n + \frac{5}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{5}{3}}$

3

$$\boxed{S = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1} = v_0 \times \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{3}\times\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1-\frac{2}{5}} = \frac{1}{3}\,\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{9}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)}$$

تمرين 3 : $u_0 = 1 , u_1 = 4$; $u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$ ، $v_n = u_{n+1} - u_n$

1

$u_2 = \frac{3}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_0$ $u_2 = \frac{12}{2} - \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$	$u_3 = \frac{3}{2}u_2 - \frac{1}{2}u_1$ $u_3 = \frac{33}{4} - \frac{4}{2} = \frac{25}{4}$	$v_0 = u_1 - u_0$ $v_0 = 4 - 1 = 3$	$v_1 = u_2 - u_1$ $v_1 = \frac{11}{2} - 4 = \frac{3}{2}$

2

$$\boxed{v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n - u_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n = \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{2}v_n}$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0 = 3$

3	لدينا $v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \dots + (u_n - u_{n-1}) = -u_0 + u_n = u_n - u_0$	
4	لدينا حسب السؤال السابق : $u_n - u_0 = v_0 + v_1 + \dots + v_{u-1} = v_0 \times \frac{1-q^n}{1-q} = 3\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 6\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$ إذن : $u_n = 6\left(1-\frac{1}{2^n}\right) + u_0 = 6 - \frac{6}{2^n} + 1 = 7 - \frac{6}{2^n}$	
	يمكنك التحقق من صحة النتيجة بتعويض n بالقيم 0 و 1 و 2 و 3 و مقارنتها بنتائج السؤال الأول	

تمرين 4 : $u_0 = 1$, $v_0 = 7$; $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$; $u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3}$

1	$u_1 = \frac{2u_0 + v_0}{3}$ $u_1 = \frac{2+7}{3} = 3$	$v_1 = \frac{u_0 + v_0}{2}$ $v_1 = \frac{1+7}{2} = 4$	$u_2 = \frac{2u_1 + v_1}{3}$ $u_2 = \frac{6+4}{3} = \frac{10}{3}$	$v_2 = \frac{u_1 + v_1}{2}$ $v_2 = \frac{3+4}{2} = \frac{7}{2}$

2		$w_n = u_n - v_n$
	أ)	لدينا : $w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} - \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{4u_n + 2v_n - 3u_n - 3v_n}{6} = \frac{u_n - v_n}{6} = \frac{w_n}{6}$ إذن $(w_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{6}$ و حدها الأول $w_0 = 1 - 7 = -6$
	ب)	$w_n = w_0 q^n = -6 \times \left(\frac{1}{6}\right)^n = \frac{-1}{6^{n-1}}$
3		$t_n = 3u_n + 2v_n$
	أ)	لدينا : $t_{n+1} = 3u_{n+1} + 2v_{n+1} = 2u_n + v_n + u_n + v_n = 3u_n + 2v_n = t_n$ ، بالتالي : $(t_n)_{n\geq 0}$ متتالية ثابتة
	ب)	بما أن $(t_n)_{n\geq 0}$ متتالية ثابتة: $\forall n \in IN \ \ t_n = t_0 = 3u_0 + 2v_0 = 3 + 14 = 17$
4		لدينا حسب ما سبق : $\begin{cases} u_n - v_n = w_n \\ 3u_n + 2v_n = t_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2u_n - 2v_n = 2w_n \\ 3u_n - 3v_n = 3w_n \\ 3u_n + 2v_n = t_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5u_n = 2w_n + t_n \\ 5v_n = t_n - 3w_n \end{cases}$ بالتالي: $\forall n \in IN \ \begin{cases} u_n = \frac{2w_n + t_n}{5} = \frac{1}{5}\left(\frac{-2}{6^{n-1}} + 17\right) \\ v_n = \frac{t_n - 3w_n}{5} = \frac{1}{5}\left(17 + \frac{3}{6^{n-1}}\right) \end{cases}$
		يمكنك التحقق من صحة النتيجة بتعويض الصيغ المحصل عليها (يمكنك أيضا حساب بعض القيم الخاصة للتحقق من صحة النتائج مثل u_0 و v_0)